Střední průmyslová škola stavební Pardubice
Vzdělávací oblast: Matematické vzdělávání
Název: Vektory IV – skalární součin, úhel

Autor: Mgr. Adéla Klárová

Datum, třída: 3.10.2012, 3.A - PS

Stručná anotace: Prezentace je určena pro třetí ročník odborných škol. Obsahuje výukový materiál –seznamuje s metodou výpočtu skalárního součinu, s jeho geometrickým významem a výpočtem úhlu dvou vektorů. Součástí jsou příklady na procvičení.

Inovace ve vzdělávání na naší škole
V rámci OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Skalární součin se definuje mezi dvěma vektory a zachycuje vztah mezi velikostí vektorů a jejich úhlem.

SKALÁRNÍ SOUČIN

- Skalární součin se definuje mezi dvěma vektory a zachycuje vztah mezi velikostí vektorů a jejich úhlem. Skalární součin definujeme mezi dvěma vektory.
- Značíme ho jako běžný součin, středovou tečku: u · v.
- Výsledkem skalárního součinu je reálné číslo, není to vektor.
- Máme-li dva vektory u = (u_1, u_2) a v = (v_1, v_2), pak jejich skalární součin je roven:

$$\boxed{\vec{u} \, . \, \vec{v} = u_1 . v_1 + u_2 . v_2}$$

GEOMETRICKÝ VÝZNAM SKALÁRNÍHO SOUČINU

- Pro skalární součin dvou vektorů platí:

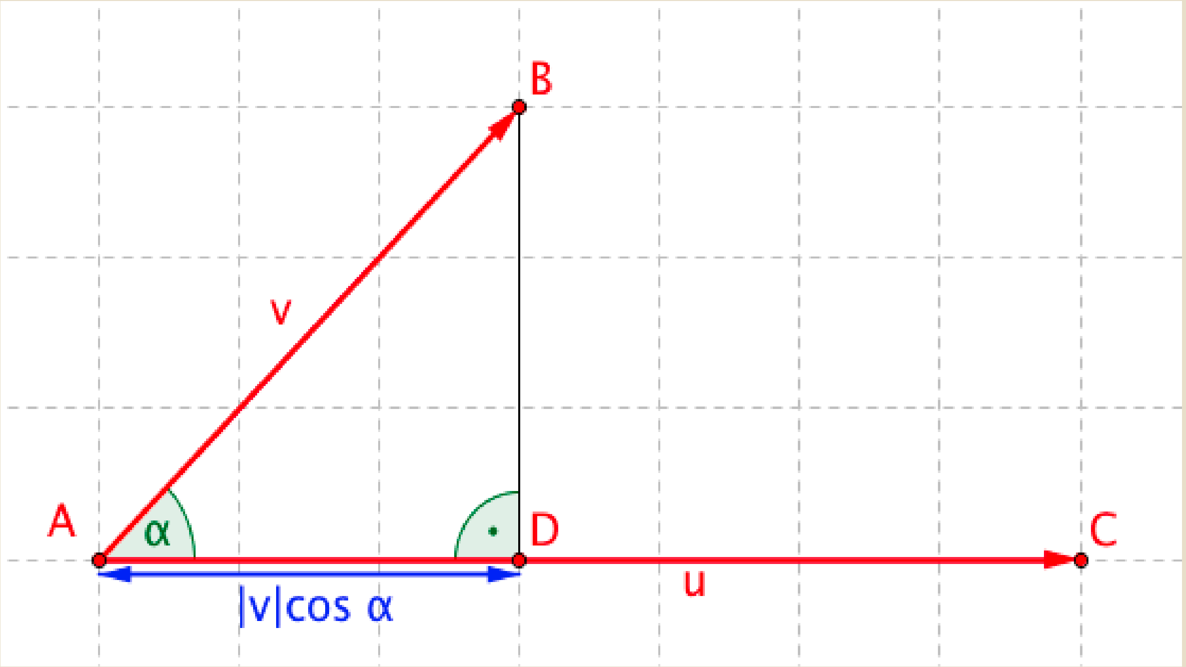
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |u| . |v| . \cos \alpha$$

kde α představuje velikost úhlů těchto vektorů. Tento vzorec ukazuje lehký způsob jak zjistit velikost úhlu dvou vektorů. Pokud z tohoto vzorce osamostatníme cosinus, získáme vzorec:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u| . |v|} = \frac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} . \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

GEOMETRICKÝ VÝZNAM SKALÁRNÍHO SOUČINU

Pokud skalárně násobíme vektory u a v, tak pokud výsledek vynásobíme délkou vektoru v, získáme délku úsečky AD, což je velikost průmětu vektoru v do směru vektoru u.



KOLMOST VEKTORŮ

- *Platí:* Skalární součin dvou nenulových vektorů je roven nule, jestliže vektory svírají pravý úhel!
- *Tedy:* Skalární součin dvou navzájem kolmých vektorů je roven 0.
- *Obráceně platí:* Je-li skalární součin dvou nenulových vektorů roven nule, jsou vektory k sobě kolmé.

PŘÍKLAD 1

- Vypočtěte skalární součin $\vec{u}.\vec{v}$, je-li dáno:

$$\vec{u} = (3;-4) \qquad |\vec{u}| = 7; |\vec{v}| = 6$$

$$\vec{v} = (-2;1) \qquad \varphi = 60^\circ$$

$$\vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 = 3.(-2) + (-4).1 = -6 - 4 = -10$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{7.6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{42}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 21$$

PŘÍKLAD 2

- Určete, zda jsou vektory $\vec{u} = (-4;5), \vec{v} = \left(2;\frac{8}{5}\right)$ k sobě kolmé.
- ***Řešení:*** $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$

$$-4.2 + 5.\frac{8}{5} = 0 \Rightarrow -8 + 8 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

- Rovnost platí, vektory jsou k sobě kolmé.

PŘÍKLAD 3

- Určete neznámou souřadnici d_1 tak, aby vektory

$$\vec{c}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};2\right);\vec{d}=\left(d_1;\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$ byly k sobě kolmé.

Řešení:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}.d_1+2.\frac{\sqrt{3}}{4}=0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}.d_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{d_1=1}$$

PŘÍKLAD 4

- Napište souřadnice vektoru kolmého k danému vektoru, uveďte alespoň dvě řešení.

$$\vec{f} = \overrightarrow{PQ} \qquad P[-4;-1]; Q[3;-2]$$

- ***Řešení:*** $\vec{f} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (7;-1)$

- u vektoru prohodíme souřadnice a u jedné z nich změníme znaménko – tím dostaneme kolmý vektor

$$\boxed{\vec{a}_1 = (1;7); \vec{a}_2 = (-1;-7)}$$

Příklad 5

- Určete velikost úhlu, který svírají vektory:

$$\vec{u} = (-1;1) \qquad \vec{u} = (-1;3)$$

$$\vec{v} = (-1;0) \qquad \vec{v} = (3;1)$$

- *Řešení:*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{-1.(-1)+1.0}{\sqrt{(-1)^2+1^2}.\sqrt{(-1)^2+0^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-1.3+3.1}{\sqrt{(-1)^2+3^2}.\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$\boxed{\varphi = 45°}$$

$$\boxed{\varphi = 90°}$$

- Zdroje:

- HUDCOVÁ, Milada; KUBIČÍKOVÁ, Libuše. *Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium*. Praha: Prometheus, spol.s r. o., 2002, ISBN 80-7196-165 - 5.
- HAVRLANT, Lukáš. *matweb.cz* [online]. [cit. 26.10.2012]. Dostupný na WWW: http://www.matweb.cz/skalarni-soucin