Střední průmyslová škola stavební Pardubice
Vzdělávací oblast: Matematické vzdělávání
Název:Vzájemná poloha přímek v rovině

Autor: Mgr. Adéla Klárová

Datum, třída: 12.11.2012, 3.A - PS

Stručná anotace: Prezentace je určena pro třetí ročník odborných škol. Výukový materiál seznamuje s metodou určení vzájemné polohy přímek v rovině. Obsahuje i příklady na procvičení.

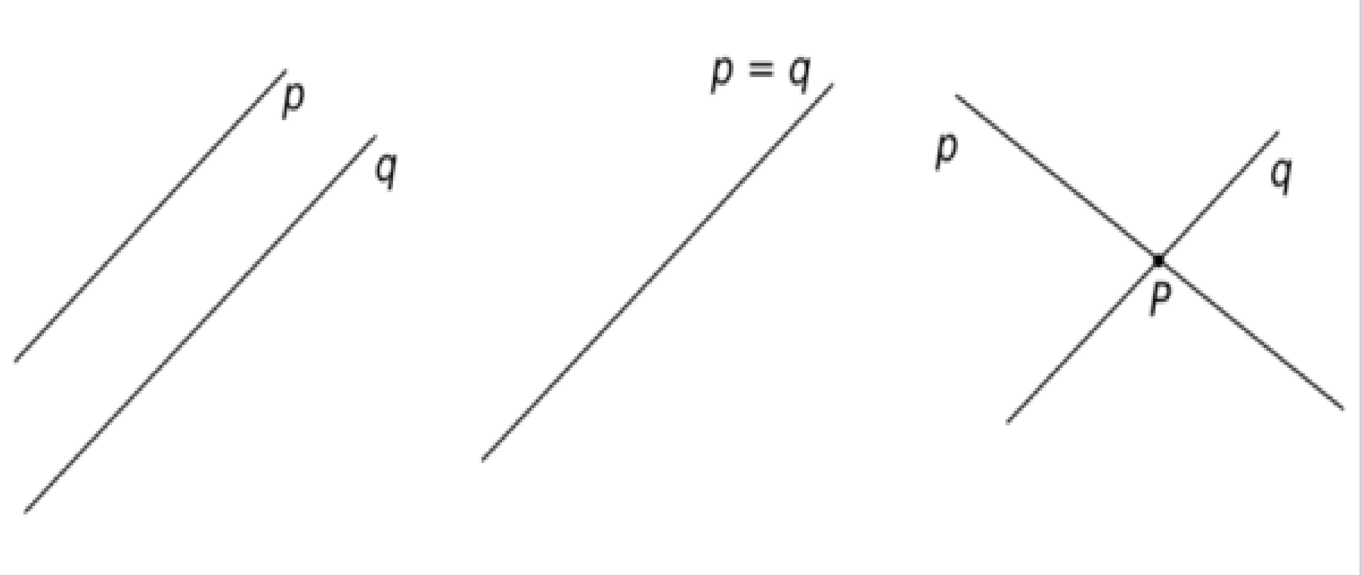
Tento materiál byl vytvořen v rámci projektu
Inovace ve vzdělávání na naší škole
V rámci OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Vzájemná poloha přímek

V ROVINĚ

Dvě přímky *p*, *q* v rovině mohou mít tři vzájemné polohy:

- $p \cap q = \emptyset$
  Přímky *p* a *q* jsou **rovnoběžné** **různé**. Nemají žádný společný bod.
- $p \cap q = p$
  Přímky *p* a *q* jsou **rovnoběžné** **totožné**. Zapisujeme $p = q$.
- $p \cap q = \{P\}$
  Přímky *p* a *q* jsou **různoběžné**. Mají jeden společný bod, bod *P*. Zapisujeme $p \times q$.


p
q
p = q
p
q
P

- **VZÁJEMNOU POLOHU DVOU PŘÍMEK URČUJEME VŽDY Z JEJICH VEKTORŮ – VEKTORY MUSÍ BÝT STEJNÉ – TEDY BUĎ OBA SMĚROVÉ, NEBO OBA NORMÁLOVÉ**

VĚTA

- Dvě přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$ jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li vektor $\boldsymbol{u}$ nenulovým reálným násobkem vektoru $\boldsymbol{v}$.

- Dvě přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$ jsou totožné právě tehdy, jsou-li rovnoběžné a leží-li bod Q na přímce p.

PŘÍKLAD

- Jsou dány body $P[3; 5]$, $Q[2; 1]$ a vektory $\boldsymbol{u} = (1; 2)$, $\boldsymbol{v} = (3; 6)$. Rozhodněte, zda jsou přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$ rovnoběžné.

Řešení:

- Hledáme nějaké reálné číslo k takové, aby $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$ (přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, je-li vektor $\boldsymbol{v}$ nenulovým násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$). $3 = 1k$, $6 = 2k$. Pro $k = 3$ je soustava splněna, přímka p je **rovnoběžná** s přímkou q.

- Dále musíme zjistit, zda bod Q leží na přímce p. Přímku p vyjádříme parametricky :
  $x = 3 + t$,
  $y = 5 + 2t$; $t \in$ R.
- Do rovnic dosadíme souřadnice bodu Q a hledáme hodnotu parametru t tak, aby platilo:
  $2 = 3 + t$,
  $1 = 5 + 2t$.
- Z první rovnice plyne $t = -1$. Po dosazení do druhé rovnice získáme $1 = 3$. To neplatí a soustava tedy nemá řešení. Bod Q proto neleží na přímce p a přímky p a q jsou **rovnoběžné různé.**

PŘÍKLAD

- Jsou dány přímky $p(P, \boldsymbol{u})$ a $q(Q, \boldsymbol{v})$, $P[2; -1]$, $\boldsymbol{u} = (1; 2)$, $Q[0; -2]$, $\boldsymbol{v} = (1; 1)$. Určete jejich vzájemnou polohu a jsou-li různoběžné, najděte i jejich průsečík

Řešení

- Nejprve vyloučíme možnost, že by přímky p a q byly rovnoběžné. Je vidět, že směrový vektor $\boldsymbol{u} = (1; 2)$ není násobkem směrového vektoru $\boldsymbol{v} = (1; 1)$, přímky p a q proto nejsou rovnoběžné. Budeme pokračovat tím, že obě přímky vyjádříme parametricky.

p: $x = 2 + t$
$y = -1 + 2t;\ t \in \mathrm{R}$

q: $x = s$
$y = -2 + s;\ s \in \mathrm{R}$.

- Dále hledáme společný bod těchto přímek, tedy bod, jehož x-ová i y-ová souřadnice je v rovnicích obou přímek stejná. Získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

  $2 + t = s$,

  $-1 + 2t = -2 + s$.

- Řešením soustavy je $t = 1$ a $s = 3$. To jsou hodnoty parametrů, které odpovídají souřadnicím námi hledaného průsečíku přímek p a q v jejich parametrických vyjádřeních. Stačí buď $t = 1$ dosadit do parametrické rovnice přímky p nebo $s = 3$ do parametrické rovnice přímky q a vypočítat souřadnice průsečíku:

p:	q:
$x = 3$,	$x=2+1=3$
$y = -2 + 3 = 1$	$y=-1+2.1=1$

- Přímky p a q jsou **různoběžné**. Jejich průsečíkem je bod $X[3; 1]$

- Vzájemnou polohu dvou přímek nemusíme určovat jen z parametrických rovnic. Můžeme využít i rovnice obecné nebo jejich jiné tvary.

Příklady na procvičení

- 1. Určete vzájemnou polohu přímek *p, q*. Jsou – li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.

$$p : 2x - y + 3 = 0 \qquad q : x = 3 + 2t \quad y = t; t \in R$$

- Řešení: $\vec{n}_p = (2;-1)$ $\quad \vec{s}_q = (2;1) \Rightarrow \vec{n}_q = (1;-2)$

Vektory nejsou stejné, ani násobkem, přímky jsou tedy různoběžné.

$$2(3+2t) - t + 3 = 0 \Rightarrow 6 + 4t - t + 3 = 0 \Rightarrow \quad t = -3$$

$$x = 3 + 2.(-3) \quad y = -3 \qquad x = -3 \quad y = -3$$

$$\boxed{P[-3;-3]}$$

- 2. Určete vzájemnou polohu přímek *p*, *q*. Jsou – li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.

$$p: 3x + y - 10 = 0 \qquad q: x = 4 - t \qquad y = -2 + 3t; t \in R$$

<u>*Řešení:*</u> $\vec{n}_p = (3;1)$ $\qquad \vec{s}_q = (-1;3) \Rightarrow \vec{n}_q = (3;1)$

- Vektory jsou stejné, přímky jsou tedy rovnoběžné

$$Q[4;-2]; Q \in q \qquad p: 3.4 - 2 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

- Bod *Q* leží na *p*, přímky jsou tedy rovnoběžné totožné

- 3. Určete vzájemnou polohu přímek *p*, *q*. Jsou – li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.

$$p: 5x - 2y + 6 = 0 \qquad q: x = -1 + 2t \qquad y = 4 + 5t; t \in R$$

- ***Řešení:***

$$\vec{n}_p = (5; -2) \qquad \vec{s}_q = (2; 5) \Rightarrow \vec{n}_q = (5; -2)$$

- Vektory jsou stejné, přímky jsou tedy rovnoběžné

$$Q[-1; 4]; Q \in q \qquad 5.(-1) - 2.4 + 6 = 0 \Rightarrow -7 \neq 0$$

- Bod *Q* neleží na *p*, přímky jsou tedy rovnoběžné různé.

- Zdroje:

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Praha 1: Prometheus, spol.s r. o., 2000, ISBN 80 - 7196 - 196 - 5.

BUŠEK, Ivan. *Analytická geometrie, sbírka úloh pro gymnázia*. Praha: Prometheus, 1996, ISBN 80 - 7196 - 055 - 1.